کد فرم : FR/FY/11 (فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)

ویرایش : صفر دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی۲-فنی (۱۳ گروه هماهنگ)** نیمسال (~~اول~~/ **دوم**) **۹۵-۱۳۹۴** نام مدرس:

نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۵/۳/۲۹** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از هرگونه ماشین حساب ممنوع است.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال۱- مقدار انتگرال دوگانه $\iint_D \frac{y}{x^۲+y^۲}dxdy$ را محاسبه کنید که در آن : **۱۵ نمره**

$$D=\{(x,y):x^۲+y^۲\le ۴\ ,\ x^۲+(y-۲)^۲\le ۴\ ,\ x\ge ۰\ \}$$

سوال۲- انتگرال $\iiint_V z\,dV$ را محاسبه کنید که در آن ، V ناحیه ای است که از بالا به کره $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ و از پایین به رویه $z=\sqrt{۳(x^۲+y^۲)}$ محدود است. **۱۵ نمره**

سوال۳- ماکزیمم تابع $f(x,y,z)=xyz$ را تحت شرایط $x+y+z=۴$ و $x-y-z=۳$ بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۴- مساحت قسمتی از رویه $z=۵-x^۲-y^۲$ را بیابید که بالای صفحه $z=-۴$ واقع است. **۱۵ نمره**

سوال۵- مسیر C قسمتی از منحنی $r(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+(۱+\sin t)\vec{k}$ به ازای $t\in[۰,\frac{\pi}{۲}]$ است. انتگرال منحنی الخط زیر را محاسبه کنید : **۲۰ نمره**

$$\int_C xe^{۲y}dx+(x^۲e^{۲y}+۲y\cot z)dy-y^۲(۱+\cot^۲ z)dz$$

سوال۶- سطح S قسمتی از صفحه $x+z=۲$ است که درون استوانه $x^۲+y^۲=۴$ قرار دارد و C مرز S است. درستی قضیه استوکس را برای میدان برداری $\vec{F}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ با استفاده از سطح S و مرز C بررسی کنید. یعنی نشان دهید انتگرالهای $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ و $\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS$ با هم برابرند. **۲۰ نمره**

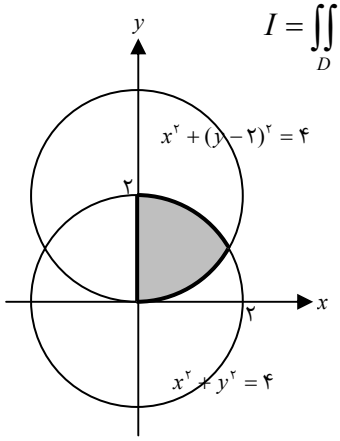
سوال۷- S سطح خارجی رویه $z=\sqrt{۱-x^۲-y^۲}$ است و **۲۰ نمره**

$$\vec{F}=z^۲x\vec{i}+(\frac{۱}{۳}y^۳+\tan z)\vec{j}+(x^۲z+y^۲)\vec{k}$$

مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ را بیابید.

موفق باشید

جواب سوال۱- روش اول : (با استفاده از مختصات قطبی)



$$I=\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy=\int_{\theta=0}^{\pi/6}\int_{r=0}^{4\sin\theta}\frac{r\sin\theta}{r^2}rdrd\theta+\int_{\theta=\pi/6}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2}\frac{r\sin\theta}{r^2}rdrd\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\pi/6}\int_{r=0}^{4\sin\theta}\sin\theta drd\theta+\int_{\theta=\pi/6}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2}\sin\theta drd\theta=\int_{\theta=0}^{\pi/6}4\sin^2\theta d\theta+\int_{\theta=\pi/6}^{\pi/2}2\sin\theta d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\pi/6}2(1-\cos 2\theta)d\theta+\int_{\theta=\pi/6}^{\pi/2}2\sin\theta d\theta=2[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{\pi/6}+[-2\cos\theta]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$=2(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})+\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

روش دوم : (با استفاده از مختصات دکارتی)

$$I=\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy=\int_{x=0}^{\sqrt{3}}\int_{y=2-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\frac{y}{x^2+y^2}dydx=\int_{x=0}^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_{y=2-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{\sqrt{3}}(\ln 4-\ln(8-4\sqrt{4-x^2})dx=-\frac{1}{2}\int_{x=0}^{\sqrt{3}}\ln(2-\sqrt{4-x^2})dx=$$

اکنون به کمک انتگرالگیری جزء به جزء خواهیم داشت :

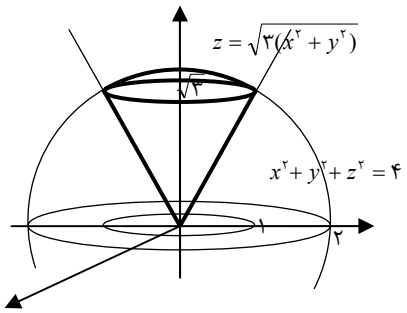
$$u=\ln(2-\sqrt{4-x^2})\quad,\quad dv=dx\quad\rightarrow\quad du=\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}(2-\sqrt{4-x^2})}\quad,\ v=x$$

$$I=-\frac{1}{2}[x\ln(2-\sqrt{4-x^2})\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}(2-\sqrt{4-x^2})}]=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}(2-\sqrt{4-x^2})}$$

به کمک تغییر متغیر مثلثاتی $x=2\sin t$ خواهیم داشت :

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\frac{8\sin^2 t\cos t\,dt}{2\cos t(2-2\cos t)}=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin^2 t\,dt}{1-\cos t}=\int_0^{\pi/3}(1+\cos t)dt=[t+\sin t]_0^{\pi/3}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

جواب سوال۲- روش اول : (با استفاده از مختصات کروی)



$$\iiint_V z\,dV=\int_{\varphi=0}^{\pi/6}\int_{\rho=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}(\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\theta d\rho d\varphi$$

$$=\pi\int_{\varphi=0}^{\pi/6}\int_{\rho=0}^{2}\rho^3\sin 2\varphi d\rho d\varphi=4\pi\int_{\varphi=0}^{\pi/6}\sin 2\varphi d\varphi=2\pi[-\cos 2\varphi]_0^{\pi/6}=\pi$$

روش دوم : (با استفاده از مختصات استوانه ای)

$$\iiint_V z\,dV=\int_{r=0}^{1}\int_{z=\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}}\int_{\theta=0}^{2\pi}zrd\theta dzdr=2\pi\int_{r=0}^{1}\int_{z=\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}}zrdzdr$$

$$=2\pi\int_{r=0}^{1}\frac{r}{2}z^2\Big|_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}}dr=4\pi\int_{r=0}^{1}r(1-r^2)dr=-\pi(1-r^2)^2\Big|_0^1=\pi$$

جواب سوال۳- روش اول : از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم. تابع زیر را تعریف می کنیم :

$$g(x,y,z,\lambda,\mu)=xyz-\lambda(x+y+z-۴)-\mu(x-y-z-۳)$$

مشتقات جزئی مرتبه اول g را برابر صفر قرار می دهیم.

$$g_x=yz-\lambda-\mu=۰\ ,\ g_y=xz-\lambda+\mu=۰\ ,\ g_z=xy-\lambda+\mu$$

$$g_\lambda=x+y+z-۴=۰\ ,\ g_\mu=x-y-z-۳=۰$$

از معادلات دوم و سوم داریم $xz=xy$. اگر $x=۰$ آنگاه معادلات چهارم و پنجم ناسازگار هستند پس $x\neq ۰$ یعنی $y=z$.

اکنون از معادلات چهارم و پنجم داریم $x-۲y=۳\ ,\ x+۲y=۴$ که نتیجه می‌دهد $x=\frac{۷}{۲}$ و $y=z=\frac{۱}{۴}$

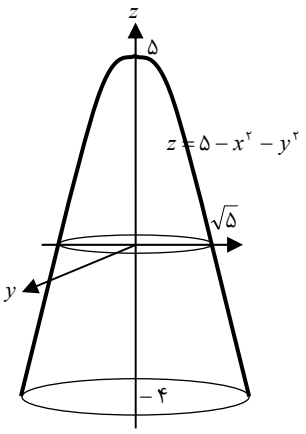
و ماکزیمم تابع f برابر است با : $\max f(x,y,z)=f(\frac{۷}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۴})=\frac{۷}{۳۲}$

روش دوم : اگر هر دو شرط برقرار باشد آنگاه داریم $x=\frac{۷}{۲}$ و $y+z=\frac{۱}{۲}$ و تابع f به صورت یک تابع دو متغیره $h(y,z)=\frac{۷}{۲}yz$ در می‌آید و می‌توان از روش ضرایب لاگرانژ با یک شرط استفاده کرد.

روش سوم : اگر هر دو شرط برقرار باشد آنگاه داریم $x=\frac{۷}{۲}$ و $z=\frac{۱}{۲}-y$ و تابع f به صورت تابع یک متغیره $g(y)=\frac{۷}{۲}y(\frac{۱}{۲}-y)$ در می‌آید که $g'(y)=-۷y+\frac{۷}{۴}$ و اگر $g'(y)=۰$ خواهیم داشت $y=\frac{۱}{۴}$ و

$$\max f(x,y,x)=\max g(y)=g(\frac{۱}{۴})=f(\frac{۷}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۴})=\frac{۷}{۳۲}$$

جواب سوال۴- روش اول : تصویر سطح مورد نظر بر روی صفحه $z=۰$ دایره $r=۳$ است.



بردار گرادیان سطح برابر است با : $\vec{n}=\frac{(۲x,۲y,۱)}{\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۱}}$

بنابر این مقدار مساحت خواسته شده برابر است با :

$$\iint_S dS=\iint_S\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۱}\,dxdy=\int_{r=۰}^{۳}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}r\sqrt{۴r^۲+۱}\,d\theta dr$$

$$=۲\pi\int_{r=۰}^{۳}r\sqrt{۴r^۲+۱}\,dr=\frac{۲\pi}{۱۲}(\sqrt{۴r^۲+۱})^۳\,|_۰^۳=\frac{\pi}{۶}(۳۷\sqrt{۳۷}-۱)$$

روش دوم : رویه مورد نظر را با استفاده از مختصات استوانه ای پارامتری می کنیم.

$$R(r,\theta)=r\cos\theta\,\vec{i}+r\sin\theta\,\vec{j}+(۵-r^۲)\vec{k}\quad ;\ ۰\le r\le ۳\ ,\ ۰\le\theta\le ۲\pi$$

$$R_r=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}-۲r\vec{k}\quad ,\quad R_\theta=-r\sin\theta\,\vec{i}+r\cos\theta\,\vec{j}$$

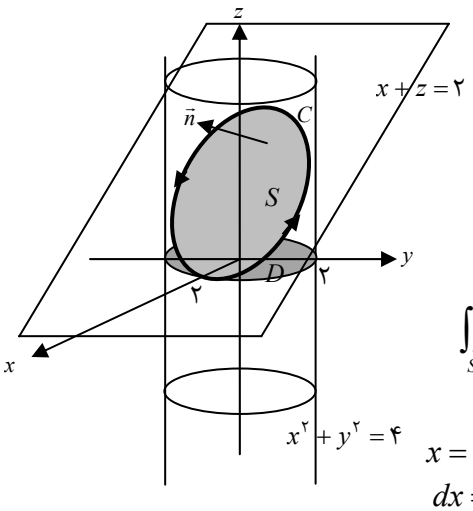
$$R_r\times R_\theta=۲r^۲\cos\theta\,\vec{i}+۲r^۲\sin\theta\,\vec{j}+r\vec{k}\quad\rightarrow\quad dS=r\sqrt{۴r^۲+۱}\,drd\theta$$

$$\iint_S dS=\int_{r=۰}^{۳}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}r\sqrt{۴r^۲+۱}\,d\theta dr=۲\pi\int_{r=۰}^{۳}r\sqrt{۴r^۲+۱}\,dr=\frac{۲\pi}{۱۲}(\sqrt{۴r^۲+۱})^۳\,|_۰^۳=\frac{\pi}{۶}(۳۷\sqrt{۳۷}-۱)$$

جواب سوال۵- مشاهده می کنیم که تابع برداری $F=(xe^{۲y},x^۲e^{۲y}+۲y\cot z,-y^۲(۱+\cot^۲z))$

بردار گرادیان تابع $f(x,y,z)=x^۲e^{۲y}+y^۲\cot z$ است و انتگرالگیری از نقطه $r(۰)=(۱,۰,۱)$ تا نقطه $r(\frac{\pi}{۲})=(۰,۱,۲)$ است.

بنابر این داریم : $\int_C xe^{۲y}dx+(۲x^۲e^{۲y}+۲y\cot z)dy-y^۲(۱+\cot^۲z)dz=[x^۲e^{۲y}+y^۲\cot z]_{(۱,۰,۱)}^{(۰,۱,۲)}=\cot(۲)-۱$



جواب سوال۶- سطح S یک بیضی است. جهت رو به بالای آن را در نظر می‌گیریم.

بردار یکه قائم برابر است با $\vec{n}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(۱,۰,۱)$

تصویر S روی صفحه $z=۰$ دایره $x^۲+y^۲=۴$ است که ناحیه داخل آن را D می‌نامیم.

چون $curl\vec{F}=(-۱,-۱,-۱)$ و $dS=\sqrt{۲}dxdy$ داریم :

$$\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_D -۲dxdy=-۲\int_{r=۰}^{۲}\int_{\theta=۰}^{۲\pi} r\,d\theta\,dr=-۴\pi\int_{r=۰}^{۲} r\,dr=-۸\pi$$

برای محاسبه انتگرال روی C ، متغیرها را بر حسب θ می‌نویسیم.

$$x=۲\cos\theta\ ,\ y=۲\sin\theta\ ,\ z=۱-x=۱-۲\cos\theta$$

و در نتیجه :

$$dx=-۲\sin\theta\,d\theta\ ,\ dy=۲\cos\theta\,d\theta\ ,\ dz=۲\sin\theta\,d\theta$$

اکنون داریم :

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_C ydx+zdy+xdz=\int_{\theta=۰}^{۲\pi}(-۴\sin^۲\theta+۲\cos\theta-۴\cos^۲\theta+۴\sin\theta\cos\theta)d\theta$$

$$=\int_{\theta=۰}^{۲\pi}(-۴+۲\cos\theta+۴\sin\theta\cos\theta)d\theta=[-۴\theta+۲\sin\theta+۲\sin^۲\theta]_۰^{۲\pi}=-۸\pi$$

و بالاخره نتیجه گرفتیم که $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS$ یعنی قضیه استوکی در مورد تابع برداری ، سطح و مرز داده شده درست است.

جواب سوال۷- <u>روش اول</u> (قضیه دیورژانس) : سطح S یک سطح بسته نیست اما اگر سطح محدود به دایره $x^۲+y^۲=۱$ واقع در صفحه $z=۰$ را S' بنامیم آنگاه $S\bigcup S'$ یک سطح بسته است و ناحیه درون آن را V می‌نامیم. طبق دیورژانس داریم :

$$\iint_{S\bigcup S'}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_V divFdV$$

از طرف دیگر داریم : $\iint_{S\bigcup S'}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{S'}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ یعنی : $\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_V divFdV-\iint_{S'}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$

اکنون دو انتگرال $\iiint_V divFdV$ و $\iint_{S'}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ را حل می‌کنیم.

چون $divF=x^۲+y^۲+z^۲$ داریم : $\iiint_V divFdV=\iiint_V(x^۲+y^۲+z^۲)dV$

به کمک مختصات کروی داریم : $\iiint_V divFdV=\int_{\rho=۰}^{۱}\int_{\varphi=۰}^{\pi/۲}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\rho^۴\sin\varphi d\theta d\varphi d\rho=۲\pi\int_{\rho=۰}^{۱}\int_{\varphi=۰}^{\pi/۲}\rho^۴\sin\varphi d\varphi d\rho=۲\pi\int_{\rho=۰}^{۱}\rho^۴d\rho=\frac{۲\pi}{۵}$

برای سطح S' داریم $z=۰$ ، $\vec{n}=(۰,۰,-۱)$ و $dS=dxdy$. در نتیجه $\vec{F}\cdot\vec{n}=-y^۲$ بنابر این داریم $\iint_{S'}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=-\iint_{S'}y^۲dxdy$

به کمک مختصات قطبی داریم : $\iint_{S'}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=-\int_{r=۰}^{۱}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}r^۳\sin^۲\theta d\theta dr=-\pi\int_{r=۰}^{۱}r^۳dr=-\frac{\pi}{۴}$

بالاخره داریم : $\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_V divFdV-\iint_{S'}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\frac{۲\pi}{۵}-(-\frac{\pi}{۴})=\frac{۱۳}{۲۰}\pi$

روش دوم (اثبات مستقیم) معادله رویه را می‌توان به صورت $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ نوشت. بردار گرادیان رویه برابر است با $(۲x,۲y,۲z)$ و بردار یکه قائم بر سطح عبارت است از $\vec{n}=(x,y,z)$. تصویر سطح S روی صفحه $z=۰$ دایره $x^۲+y^۲\le ۱$ است که آن را D می‌نامیم.

اکنون داریم $dS=\dfrac{dxdy}{z}$ و همچنین : $\vec{F}\cdot\vec{n}=۲x^۲z^۲+\frac{۱}{۳}y^۴+y\tan z+y^۲z$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S(۲x^۲z^۲+\frac{۱}{۳}y^۴+y\tan z+y^۲z)\frac{dxdy}{z}$$

$$=\iint_D(۲x^۲\sqrt{۱-x^۲-y^۲}+\frac{۱}{۳}\frac{y^۴}{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}}+\frac{y\tan\sqrt{۱-x^۲-y^۲}}{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}}+y^۲)dxdy$$

با استفاده مختصات قطبی خواهیم داشت :

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_D(۲r^۲\cos^۲\theta\sqrt{۱-r^۲}+\frac{۱}{۳}\frac{r^۴\sin^۴\theta}{\sqrt{۱-r^۲}}+\frac{r\sin\theta\tan\sqrt{۱-r^۲}}{\sqrt{۱-r^۲}}+r^۲\sin^۲\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_{r=۰}^{۱}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}(۲r^۳\cos^۲\theta\sqrt{۱-r^۲}+\frac{۱}{۳}\frac{r^۵\sin^۴\theta}{\sqrt{۱-r^۲}}+\frac{r^۲\sin\theta\tan\sqrt{۱-r^۲}}{\sqrt{۱-r^۲}}+r^۳\sin^۲\theta)d\theta dr$$

$$=\int_{r=۰}^{۱}(۲r^۳\sqrt{۱-r^۲}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\cos^۲\theta\,d\theta+\frac{۱}{۳}\frac{r^۵}{\sqrt{۱-r^۲}}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\sin^۴\theta\,d\theta+\frac{r^۲\tan\sqrt{۱-r^۲}}{\sqrt{۱-r^۲}}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\sin\theta d\theta+r^۳\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\sin^۲\theta\,d\theta)dr$$

چون داریم :

$$\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\sin\theta d\theta=[-\cos\theta]_{\theta=۰}^{۲\pi}=۰$$

$$\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\cos^۲\theta d\theta=\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\sin^۲\theta d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}(۱-\cos۲\theta)d\theta=\frac{۱}{۲}[\theta-\frac{۱}{۲}\sin۲\theta]_{\theta=۰}^{۲\pi}=\pi$$

$$\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\sin^۴\theta d\theta=\frac{۱}{۴}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}(۱-\cos۲\theta)^۲d\theta=\frac{۱}{۴}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}(۱-۲\cos۲\theta+\cos^۲۲\theta)d\theta=\frac{۱}{۸}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}(۳-۴\cos۲\theta+\cos۴\theta)d\theta$$

$$=\frac{۱}{۸}[۳\theta-۲\sin۲\theta+\frac{۱}{۴}\sin۴\theta]_{\theta=۰}^{۲\pi}=\frac{۳\pi}{۴}$$

می‌توانیم بنویسیم :

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\int_{r=۰}^{۱}(۲\pi r^۳\sqrt{۱-r^۲}+\frac{\pi}{۴}\frac{r^۵}{\sqrt{۱-r^۲}}+\pi r^۳)dr$$

با تغییر متغیر $۱-r^۲=u^۲$ خواهیم داشت :

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\frac{\pi}{۴}\int_{r=۰}^{۱}(۸(۱-u^۲)u^۲+(۱-u^۲)^۲+۴u^۳)du$$

$$=\frac{\pi}{۴}\int_{r=۰}^{۱}(-۷u^۴+۴u^۳+۶u^۲+۱)du=\frac{\pi}{۴}(-\frac{۷}{۵}+۱+۲+۱)=\frac{۱۳}{۲۰}\pi$$